$2^{ème}$ Science

Série N°:13

(suite Arithmétique)

EXERCICE N°1 :

Soit la suite u définie par : $u_n = \dfrac{4n+8}{n^2+1}$

1/ calculer u_0 , u_1 et u_5 .

2/ a- Trouver l'entier n tel que : $u_n = 2$.

b- Déduire que pour tout $n \geq 4$; on a : $u_n < 2$.

3/ a- Ecrire u_{n+1} en fonction de n et montrer que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-4(n^2+5n+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$

b- Déduire que : $u_{n+1} < u_n$.

EXERCICE N°2 :

Soit la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ a- Calculer u_1 et u_2 .

b- Déduire que u_n n'est pas une suite arithmétique.

2/ Soit la suite v définie par $v_n = 3 + \dfrac{1}{u_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que v_n est une suite arithmétique de raison r = 1.

3/ a- Exprimer v_n en fonction de n.

b- En déduire u_n en fonction den

4/ Calculer $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + v_{15}$.

EXERCICE N°3 :

Soit u une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{1 + u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ Calculer u_1 et u_2 et vérifier que u_n n'est pas une suite arithmétique.

2/ Soit la suite v définie par : $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a- Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

b- Déduire que v_n est une suite arithmétique dont on précisera sa raison et son premier terme v_0.

c- Exprimer v_n en fonction de n.

3/ a- Vérifier que : $u_n = \dfrac{v_n + 1}{v_n - 1}$

b- Exprimer u_n en fonction de n.

EXERCICE N°4 :

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1}^2 - u_n^2 = 4, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

2/ Vérifier que $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite arithmétique.

3/ On pose : $v_n = u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que v_n est une suite arithmétique dont on précisera sa raison

4/ a- Exprimer v_n en fonction de n.

b- Déduire u_n en fonction de n .

5/ On pose : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2$, exprimer S_n en fonction de n.

EXERCICE N°5 :

1/ Factoriser le trinôme : $T(x) = x^2 + 3x + 2$.

2/ Soit la suite u définie sur IN par : $u_n = \dfrac{2n+3}{T(n)}$

a- Calculer les cinq premiers termes.

b- Trouver les réels a et b tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2}$

c- Exprimer $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de n et montrer que : $u_{n+1} < u_n$.

3/ Soit la suite v définie sur IN par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a- Calculer v_0 ; v_1 et v_2 .

b- Montrer que : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2(2n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$

c- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} > v_n$.

4/ Calculer $S = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots\dots\dots\dots + v_{10}$